مثال: ليكن $A = R \times R$ حيث R حقل الأعداد الحقيقية ولنزود A بقانوني تشكيل $*_1$ و $*_2$ معرفين بالشكل:

$(x_1,y_1) *_1 (x_2,y_2) = (x_1+x_2 \ ; \ y_1,y_2)$

$(x_1,y_1) *_2 (x_2,y_2) = (x_1x_2 \ ; \ y_1,y_2)$

والمطلوب

1 - بيّن فيما إذا كان $(A, *_1)$ زمرة تبديلية
2 - بيّن فيما إذا كان $(A, *_2)$ زمرة.
3 - هل $*_2$ تتوزع على الجمع المعرّف + ؟
4 - بيّن فيما إذا كان $(R \times R^*, *_1, *_2)$ حلقة؟

الحل 1- $*_1$ تجميعي لأن:

$((x_1,y_1) *_1 (x_2,y_2)) *_1 (x_3,y_3)$

$= (x_1+x_2+x_3 \ ; \ y_1,y_2,y_3)$

$(x_1,y_1) *_1 ((x_2,y_2) *_1 (x_3,y_3)) =$

$(x_1+x_2+x_3 \ ; \ y_1,y_2,y_3)$

- $*_1$ تبديلية لأن:

$(x_1,y_1) *_1 (x_2,y_2) = (x_1+x_2 \ ; \ y_1,y_2)$

$= (x_2+x_1 \ ; \ y_2,y_1)$

لأن الجمع والضرب تبديليين في R

$= (x_2,y_2) *_1 (x_1,y_1)$

- لنفرض (e_1,e_2) حيادي $*_1$ وهو

$(x,y) *_1 (e_1,e_2) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in A$

$\begin{cases} x+e_1 = x \\ y\,e_2 = y \end{cases}$

بالمطابقة

$e_1 = 0$

$e_2 = 1$

وهو $(0,1) \in A$ حيادي $*_1$

- ليكن $(x,y) \in A$ ولنفرض (x',y') عنصر يحقق

$(x,y) *_1 (x',y') = (0,1)$

$\begin{cases} x+x' = 0 \\ y\,y' = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x' = -x \\ y' = \frac{1}{y} \end{matrix}$

أذن $(x',y') = (-x, \frac{1}{y})$

إذاً لكل عنصر $(x,y) \in R \times R^*$ نظير هو $(-x, \frac{1}{y})$ يتبع

- إذا كان $(x,0)$ لا يملك نظير.

- إذاً $(A, *_1)$ ليست زمرة

2 - $*_2$ تجميعي لأن:

$((x_1,y_1) *_2 (x_2,y_2)) *_2 (x_3,y_3)$

$= (x_1x_2x_3 \ ; \ y_1,y_2,y_3)$

$(x_1,y_1) *_1 ((x_2,y_2) *_2 (x_3,y_3))$

$= (x_1x_2x_3 \ ; \ y_1,y_2,y_3)$

$*_2$ تبديلية لأن:

$(x_1,y_1) *_2 (x_2,y_2) = (x_1x_2 \ ; \ y_1,y_2)$

$= (x_2x_1 \ ; \ y_2,y_1)$

$= (x_2,y_2) *_2 (x_1,y_1)$

- لنفرض (e_1,e_2) العنصر الحيادي، أي يحقق

$(x,y) *_2 (e_1,e_2) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in A$

$\begin{cases} x\,e_1 = x \\ y\,e_2 = y \end{cases}$

بالمطابقة نجد $e_1 = 1$ و $e_2 = 1$

وبالتالي الحيادي هو $(1,1) \in A$

- ليكن $(x,y) \in A$ ولنفرض (x',y') نظير (x,y) أي يحقق:

$(x,y) *_2 (x',y') = (1,1)$

$\begin{cases} x\,x' = 1 \\ y\,y' = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x' = \frac{1}{x} \\ y' = \frac{1}{y} \end{matrix}$

لكل عنصر $(x,y) \in R^* \times R^*$ يملك نظير $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ يتبع الأجل كل عنصر (x,y) من A حيث إما $x=0$ أو $y=0$ لا يملك نظير من A

مثال: $(5,0)$ ، $(0,5)$ ، $(0,0)$

ضعيفة لا تملك نظير

3- $*_2$ تتوزع على $+$

$(x_1,y_1) *_2 ((x_2,y_2) + (x_3,y_3)) \overset{?}{=} ((x_1,y_1) *_2 (x_2,y_2)) + ((x_1,y_1) *_2 (x_3,y_3))$

ط1 ط2

لعدم المساواة نجد أن $*_2$ لا تتوزع على $+$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1 ب $= (x_1, y_1) *_2 (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$

$= (x_1 x_2 + x_1 x_3, y_1 y_2 + y_1 y_3)$

2 ب $= (x_1 x_2, y_1 y_2) + (x_1 x_3, y_1 y_3) =$

$(x_1 x_2 + x_1 x_3, y_1 y_2 + y_1 y_3)$

أي أن $*_2$ توزع على $+$.

4- $(R \times R^2, *_1)$ زمرة تبديلية

$*_2$ تجميعية

يبقى دراسة هل $*_2$ توزيعي على $*_1$ أم لا؟

$(x_1, y_1) *_2 ((x_2, y_2) *_1 (x_3, y_3)) \stackrel{?}{=}$

$((x_1, y_1) *_2 (x_2, y_2)) *_1 ((x_1, y_1) *_2 (x_3, y_3))$

وظيفة ـــــ

انتهت المسألة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner